



POLITECHNIKA
GDAŃSKA



STANISŁAW BURZYŃSKI

NIELINIOWA STATYKA
6-PARAMETROWYCH POWŁOK
SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH
EFEKTYWNE OBLICZENIA MES

GDAŃSK 2021

PRZEWODNICZĄCY KOMITETU REDAKCYJNEGO
WYDAWNICTWA POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Dariusz Mikielewicz

REDAKTOR PUBLIKACJI NAUKOWYCH

Michał Szydłowski

REDAKTOR SERII

Jerzy M. Sawicki

RECENZENCI

Marcin Cudny

Wojciech Pietraszkiewicz

REDAKCJA JĘZYKOWA

Agnieszka Frankiewicz

PROJEKT OKŁADKI

Jolanta Cieślawska

Wydano za zgodą

Rektora Politechniki Gdańskiej

Oferta wydawnicza Politechniki Gdańskiej jest dostępna pod adresem
<https://www.sklep.pg.edu.pl>

Utwór nie może być powielany i rozpowszechniany, w jakiegokolwiek formie
i w jakikolwiek sposób, bez pisemnej zgody wydawcy

© Copyright by Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 2021

ISBN 978-83-7348-836-6

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Wydanie I. Ark. wyd. 8,5, ark. druku 8,75, 186/964

Druk i oprawa: Volumina.pl Daniel Krzanowski
ul. Księcia Witolda 7-9, 71-063 Szczecin, tel. 91 812 09 08

*Pracę dedykuję moim najbliższym,
Annie, Agacie i Idze.*

Spis treści

Wykaz oznaczeń	9
1. WSTĘP	11
1.1. Stan wiedzy	12
1.2. Założenia	14
1.3. Próba jednoosiowego rozciągania – rola w opisie teorii plastyczności	14
1.4. Znaczenie polskich uczonych w rozwoju teorii plastyczności	16
1.4.1. Maksymilian Tytus Huber	17
1.4.2. Włodzimierz Trzywdar Burzyński	18
1.4.3. Polska szkoła plastyczności	18
1.5. Struktura pracy	19
2. ZARYS TEORII POWŁOK	21
2.1. Powłoka jako ciało trójwymiarowe	21
2.2. Zasady zachowania, równania ruchu	22
2.3. Ciało typu powłoka, równania ruchu	23
2.4. Zasada prac wirtualnych, miary odkształceń	26
2.5. Współrzędne fizyczne, notacja macierzowo-operatorowa	26
2.6. Linearyzacja	29
3. RÓWNANIA SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNE OŚRODKA COSSERATÓW	30
3.1. Wprowadzenie	30
3.2. Statyka i kinematyka w liniowym ośrodku Cosseratów	30
3.2.1. Problem brzegowy	31
3.3. Sprężysty izotropowy ośrodek Cosseratów	32
3.3.1. Stan sprężysty w ośrodku Cosseratów	32
3.3.2. Redukcja do zagadnienia płaskiego	33
3.4. Założenia klasycznej teorii plastyczności	36
3.4.1. Zagadnienie jednowymiarowe	37
3.4.2. Zagadnienie przestrzenne	40
3.4.3. Kryterium uplastycznienia, funkcja wzmocnienia	41
3.5. Plastyczność w ośrodku Cosseratów	45
4. ALGORYTMY NUMERYCZNE	49
4.1. Numeryczne rozwiązanie równań plastyczności	49
4.2. Idea algorytmów rozwiązywania równań plastyczności	50
4.3. Równania plastyczności jako zagadnienie brzegowe równania różniczkowego zwyčajnego	50
4.4. <i>Closest point projection method</i> (CPPM)	53

4.5. <i>Cutting plane algorithm</i> (CPA)	54
4.6. Algorytmiczna macierz konstytutywna	54
4.7. Porównanie algorytmów CPPM i CPA	55
4.8. Algorytmy powrotu – płaski ośrodek Cosseratów	57
4.9. Test algorytmów CPPM i CPA	59
5. WYBRANE ZAGADNIENIA METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH	62
5.1. Aproksymacja skończenie wymiarowa i interpolacja	62
5.1.1. Interpolacja wielkości wektorowych	62
5.1.2. Interpolacja wielkości z grupy $SO(3)$	63
5.1.3. Interpolacja wielkości z grupy $so(3)$	64
5.2. Wektory i macierze elementowe	65
5.3. Śledzenie ścieżek równowagi	65
5.4. Prawo konstytutywne dla sił i momentów przekrojowych	67
5.5. Rozwiązanie przyrostowe w zagadnieniach sprężysto-plastycznych	70
5.6. Algorytmy plastyczności w globalnym algorytmie MES	71
6. EFEKTYWNOŚĆ OBLICZEŃ	73
6.1. Rozwój komputerów osobistych	73
6.2. Koncepcja obliczeń wielowątkowych	74
6.3. Rozwiązywanie rzadkich układów równań	78
7. PRZYKŁADY NUMERYCZNE	83
7.1. Problem Kirscha w ośrodku Cosseratów	85
7.2. Tarcza z otworem	88
7.3. Panel walcowy – Scordelis–Lo <i>roof</i>	91
7.4. Cylinder ścinany	99
7.5. Wspornik ceowy	105
7.6. Panel płytowy w kształcie korytka	112
8. PODSUMOWANIE	121
8.1. Oryginalne aspekty pracy	121
8.2. Wnioski z pracy	122
8.3. Kierunki dalszych badań	122
8.4. Podziękowania	123
DODATKI	124
A. Opis obrotów	124
A.1. Tensor ortogonalny	124
A.2. Tensor skośnie symetryczny	124
A.3. Obrót właściwy, grupa obrotów $SO(3)$	124
A.4. Twierdzenie Eulera o obrotach	125
A.5. Mały obrót, przestrzeń styczna do grupy obrotów	125
A.6. Parametryzacja grupy obrotów	125

B. Geometria powierzchni	127
C. Całkowanie numeryczne	127
D. Program PLST2GID	129
Bibliografia	131
Streszczenie w języku polskim	139
Streszczenie w języku angielskim	140

WYKAZ OZNACZEŃ

$\mathbf{s} \cdot \mathbf{t}, \mathbf{S} \cdot \mathbf{t}, \mathbf{S} \cdot \mathbf{T}$	– działanie nasunięcia prostego
$\mathbf{S} : \mathbf{T}$	– działanie pełnego nasunięcia
$\mathbf{S} \otimes \mathbf{T}$	– działanie iloczynu zewnętrznego
$A_{,i} = \frac{\partial A}{\partial x_i}$	– pochodna cząstkowa po współrzędnych
$\dot{A} = \frac{dA}{dt}$	– pochodna po zmiennej czasowej
$\frac{Df^\alpha}{Dt} = \frac{\partial f^\alpha}{\partial t}$	– pochodna materialna w opisie materialnym
$\frac{D}{Dt} f^k = \frac{\partial f^k}{\partial t} + v^j f_{;j}^k$	– pochodna materialna w opisie przestrzennym
e	– dewiator tensora odkształcenia
$\mathbf{e}(\mathbf{u})$	– wektor odkształceń uogólnionych
f	– funkcja plastycznego płynięcia
$f_{;j}^k$	– pochodna kowariantna pola \mathbf{f}
h_0	– grubość powłoki
l, l_b, l_t	– długości charakterystyczne mikrostruktury
\mathbf{p}	– wektor powierzchniowego obciążenia zewnętrznego
\mathbf{s}	– wektor naprężeń uogólnionych
\mathbf{s}^*	– wektor obciążenia brzegowego
$so(3)$	– mały obrót w przestrzeni stycznej do $SO(3)$
\mathbf{s}	– dewiator tensora $\boldsymbol{\sigma}$
$\mathbf{t}_\alpha^0, \mathbf{t}_3^0$	– wektory bazy ortogonalnej
\mathbf{u}	– wektor rzeczywistych, uogólnionych przemieszczeń powłoki
A	– tensor termodynamicznych sił wzmocnienia
$\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{u})$	– operator macierzowy w relacji odkształcenie–przemieszczenie
\mathbf{C}_i	– operator konstytutywny płaskiego ośrodka Cosseratów
$\mathbf{C}^e, \mathbf{C}^{ep}$	– sprężysty i sprężysto-plastyczny operator konstytutywny
E	– moduł Younga
E_T	– styczny moduł sprężysto-plastyczny
$E(p)$	– wydajność obliczeń wielowątkowych
E^3	– 3-wymiarowa wektorowa przestrzeń euklidesowa, przestrzeń wektorowa ze zdefiniowanym produktem wewnętrznym (iloczynem skalarnym), przestrzeń translacyjna dla przestrzeni \mathcal{E}^3
H	– uogólniony moduł wzmocnienia
H	– styczny moduł wzmocnienia izotropowego
$J_{1,2,3}$	– niezmienniki tensora

K	– styczny moduł wzmocnienia kinematycznego
$\mathbf{K}_T, \mathbf{K}_M, \mathbf{K}_G$	– styczna macierz sztywności, część materiałowa, część geometryczna
M	– powierzchnia podstawowa powłoki
$\mathbf{M}(x)$	– tensor momentów przekrojowych
$\mathbf{N}(x)$	– tensor sił przekrojowych
\mathbf{N}	– tensor płynięcia
P	– ciało typu powłoka
R^3	– przestrzeń rzeczywista, 3-krotny produkt przestrzeni liczb rzeczywistych R
$S(p)$	– przyspieszenie w obliczeniach wielowątkowych
$SO(3)$	– grupa właściwych tensorów ortogonalnych
$\mathbf{T}_0(x)$	– tensor struktury powłoki w konfiguracji odniesienia
$\mathbf{T}(x, t)$	– tensor struktury powłoki w konfiguracji aktualnej
\mathbf{a}	– tensor parametrów wzmocnienia
α_s, α_t	– współczynnik ścinania, współczynnik owinięcia
β	– tensor przesunięcia powierzchni płynięcia we wzmocnieniu kinematycznym (<i>back stress tensor</i>)
γ	– skalarny mnożnik plastyczny
$\boldsymbol{\varepsilon}_\beta$	– wektor odkształceń membranowych i poprzecznych
$\boldsymbol{\varepsilon}^p$	– tensor odkształcenia plastycznego
ε_{ij}	– składowe tensora odkształcenia
\mathcal{E}^3	– 3-wymiarowa punktowa przestrzeń euklidesowa, przestrzeń afiniczna
$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$	– efektywne (skumulowane) odkształcenie plastyczne
ε_e	– intensywność odkształcenia
c_{ijk}	– składowe symbolu permutacyjnego
$\boldsymbol{\varepsilon}$	– wektor odkształcenia płaskiego ośrodka Cosseratów
$\boldsymbol{\kappa}_\beta$	– wektor krzywizn
κ_{ij}	– składowe tensora krzywizn
$\boldsymbol{\mu}, \mu_{ij}$	– niesymetryczny tensor naprężenia momentowego, reprezentacja macierzowa
μ, λ	– stałe Lamégo
μ_c	– dodatkowy moduł ścinania
ν	– współczynnik Poissona
$\boldsymbol{\zeta} = (\boldsymbol{\zeta}_1, \boldsymbol{\zeta}_2)$	– baza naturalna
$\boldsymbol{\sigma}, \sigma_{ij}$	– niesymetryczny tensor naprężenia (tensor naprężenia siłowego), reprezentacja macierzowa
σ_Y	– granica plastyczności
σ_e	– intensywność odkształcenia
$\boldsymbol{\sigma}$	– wektor naprężenia płaskiego ośrodka Cosseratów
ψ	– funkcja potencjału plastycznego
$\Pi_{(e)}$	– fizyczny element skończony, podobszar dziedziny zadania

Rozdział 1

WSTĘP

Plastyczność jest jednym z najszerzej opisanych w literaturze typów nieliniowości materiałowej. Wynika to z zapotrzebowania inżynierów na odwzorowanie zachowania konstrukcji (czy to budowlanej, czy też np. części maszyny) po przekroczeniu obciążenia, które powoduje przejście jej materiału ze stanu sprężystego do plastycznego (na poziomie naprężeń w konstrukcji mówi się o osiągnięciu granicy plastyczności). Główna różnica pomiędzy tymi stanami polega na odwracalności deformacji wynikającej z przyłożenia i zdjęcia obciążenia. Materiał sprężysty powróci do swojego pierwotnego kształtu, uplastyczniony zaś zachowa („zapamięta”¹) częściowo zmianę swojego kształtu. Zmiany te, tj. odkształcenia trwałe, kumulują się i mają istotny wpływ na wyężnienie materiału w dalszych cyklach obciążania i odciążania.

Fundamentem pracy inżyniera jest prawidłowy dobór schematu statycznego do projektowanej konstrukcji. Wiele z nich można traktować jako powłoki. Wyróżnikiem specyficznej geometrii tych trójwymiarowych ciał jest jeden z wymiarów (grubość), wielokrotnie mniejszy od dwóch pozostałych. Konstrukcje powłokowe charakteryzują się możliwością przeniesienia dużych obciążeń przy stosunkowo niskim ciężarze własnym. CALLADINE [1983] wymienia następujące obszary zastosowań teorii powłok: konstrukcje budowlane (historyczne kopuły kamienne i współczesne profile walcowane), instalacje przemysłowe (kotły, rury itp.), konstrukcje pojazdów (lądowych, wodnych, powietrznych), drobne przedmioty codziennego użytku (obudowy sprzętów elektronicznych, opakowania itp.). W każdym z wymienionych przypadków może się pojawić konieczność rozpatrzenia obiektu od strony teorii naukowej, tj. wyjaśnienia zachodzących zjawisk na podstawie obserwacji i stanu wiedzy oraz wyciągnięcia wniosków co do przyszłych przypadków.

Na przestrzeni lat wielokrotnie podejmowano próby opisu teorii powłok wykonanych z materiału sprężysto-plastycznego. W pracy CALLADINE [1983] wskazano następujące zastosowania tak sformułowanej teorii: formowanie zakrzywionych zbiorników i innych obiektów z płaskich blach (duże strefy uplastycznienia i znaczne zmiany geometrii), lokalne uplastycznienie pod obciążeniami skupionymi lub liniowymi (mały wpływ na globalną deformację), duży wpływ nawet małych stref uplastycznienia na pokrytyczne zachowanie konstrukcji (analiza stateczności).

W wielu aspektach projektowania konstrukcji, w szczególności w teorii powłok, przełomowe okazało się zastosowanie metody elementów skończonych (MES) do określania stanu deformacji i wyężnienia. Pozwala ona na rozpatrywanie niemal dowolnych geometrii pod szerokim wachlarzem obciążeń, w wielu typach analiz. Powszechność komputerów powoduje, że metoda ta jest dostępna dla niemal każdego projektanta. Za rozpowszechnieniem MES kryje się zagrożenie w postaci jej nieodpowiedzialnego stosowania. Metoda elemen-

¹ Dlatego materiały plastyczne klasyfikuje się jako materiały z pamięcią.

tów skończonych pozostaje narzędziem, w którym wszelkie dane wejściowe i interpretacja wyników zależą od człowieka. Trafność analiz wykonanych z wykorzystaniem MES została wielokrotnie potwierdzona, wiele ośrodków naukowych dąży do coraz lepszego jej poznania i rozszerzenia spektrum jej zastosowań.

Najważniejsze cele niniejszej pracy obejmują sformułowanie i implementację numeryczną sprężysto-plastycznych równań konstytutywnych w ramach nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok (zob. m.in. CHRÓŚCIELEWSKI I IN. [2004] i cytowana tam literatura). Teoria ta rozwijana jest od wielu lat m.in. w zespole obecnej Katedry Wytrzymałości Materiałów na Politechnice Gdańskiej. Wśród tematów zrealizowanych na jej kanwie warto wymienić takie jak: analiza problemów dynamiki, opis kompozytów (zachowanie sprężyste), zastosowanie elementów skończonych o założonym polu odkształceń, analiza powłok zbudowanych z materiałów FGM czy wreszcie – będąca tematem niniejszej rozprawy – implementacja materiału sprężysto-plastycznego.

Autor książki uzyskał dostęp do starannie przygotowanego oprogramowania bazującego na solidnym podłożu teoretycznym, dającym komfort pracy nad implementacją kolejnych zagadnień. Potencjał nowoczesnych technologii komputerowych w zakresie przyspieszania obliczeń numerycznych nie był dotąd w pełni wykorzystywany. Stąd część niniejszej pracy stanowią przystosowanie algorytmów numerycznych do obliczeń wielowątkowych oraz implementacja nowoczesnych algorytmów rozwiązywania układów równań (solver; w dalszej części pracy te pojęcia będą używane naprzemiennie) przeznaczonych do układów formułowanych w ramach MES.

Literatura w tekście przywoływana jest przez wskazanie nazwiska lub nazwisk autorów pracy oraz roku wydania. W przypadku źródeł, do których autor nie miał bezpośredniego dostępu, adres bibliograficzny zamieszczono w przypisie dolnym w miejscu powołania się na dane opracowanie.

1.1. Stan wiedzy

Problem sprężysto-plastycznej analizy konstrukcji powłokowych był wielokrotnie poruszany w literaturze, od strony zarówno czysto teoretycznej (zob. CALLADINE [1983]), jak i obliczeń numerycznych (zob. np. przegląd literatury w EBERLEIN, WRIGGERS [1999]).

Niewątpliwie kluczową rolę w rozwoju analiz numerycznych problemów powłokowych odgrywa metoda elementów skończonych. EBERLEIN, WRIGGERS [1999] podają dwa główne powody, dla których elementy skończone w analizie powłok sprężysto-plastycznych są bardzo zaawansowane (*highly sophisticated*). Pierwszym z nich jest konieczność specjalnego potraktowania rotacyjnych stopni swobody w analizie skończonych obrotów. Należy podkreślić, że rozpatrywana tutaj teoria powłok umożliwia analizę obrotów bez ograniczeń co do ich wartości. Obrotowe stopnie swobody, w szczególności rotacja wokół osi normalnej do powierzchni podstawowej (*drilling rotation*), pojawiają się w niej w sposób naturalny. Drugą trudnością jest sformułowanie równań konstytutywnych dla wypadkowych sił i momentów przekrojowych, z założenia definiowanych na powierzchni odniesienia.

Pierwsza koncepcja rozwiązania problemu definicji sił i momentów przekrojowych polega na wprowadzeniu pewnych założeń dotyczących rozkładu deformacji na grubości

powłoki i zrealizowaniu na tej podstawie całkowania po grubości powłoki składowych naprężeń. Wadą tego postępowania jest konieczność przyjęcia dodatkowych założeń (w stosunku do analizy czysto sprężystej), jego zaletą stanowi zaś możliwość prostej implementacji ogólnie znanych i stosowanych praw konstytutywnych płaskiego stanu naprężenia lub stanu przestrzennego. Takie podejście znalazło zastosowanie w niniejszej pracy.

W drugiej koncepcji uwzględnienia plastyczności w powłokach relacje sprężysto-plastyczne buduje się bezpośrednio dla sił przekrojowych (zob. np. BANK, BIENIEK² [1988]). W tym wypadku przejście z relacji sprężysto-plastycznej dla naprężeń do relacji dla sił przekrojowych odbywa się na etapie rozważań teoretycznych. Takie postępowanie sprawia, że zastosowanie nawet prostych modeli sprężysto-plastycznych prowadzi do skomplikowanego sformułowania (zob. np. DUJC, BRANK [2012] i cytowana tam literatura).

W niniejszej pracy równania plastyczności są rozwiązywane dla przypadku płaskiego stanu naprężenia (uogólnionego na przypadek ośrodka Cosseratów). Zastosowanie algorytmów przeniesionych bezpośrednio ze stanu trójwymiarowego powodowałoby w tym przypadku powstanie niefizycznych, wychodzących poza płaszczyznę, składowych tensora naprężenia. W pracy SIMO, TAYLOR [1986] zaproponowano algorytm utrzymujący założenia płaskiego stanu naprężenia, w pracy RAMM, MATZENMILLER [1987] zastosowano go do analizy powłok. W niniejszej pracy rozszerzono ten algorytm na przypadek kontinuum Cosseratów.

Obszerne przeglądy literatury dotyczące konstrukcji powłokowych można znaleźć w książkach JEMIELITA [1991], CHRÓŚCIELEWSKI I IN. [2004], WIŚNIEWSKI [2010]. Spektrum zagadnień powłokowych, z jakimi mierzą się współcześnie badacze, zawarto w materiałach pokonferencyjnych konferencji SSTA (*Shell Structures, Theory and Applications*), zob. PIETRASZKIEWICZ, GÓRSKI (red.) [2014] i poprzednie edycje, a także np. KRÄTZIG, OÑATE [1990].

Ciągły rozwój MES oraz innych metod numerycznych nie byłby możliwy, gdyby nie rozpowszechnienie komputerów osobistych. Przez wiele lat efektywność obliczeń (w szczególności ich czas trwania) była zależna tylko od maksymalnej prędkości taktowania procesora, programy działały sekwencyjnie, realizując kolejno zapisane w kodzie instrukcje. Nowoczesne procesory pozwalają na wykonywanie wielu działań jednocześnie – ich architektura jest wielowątkowa. Zasadniczo nie jest przy tym zwiększane maksymalne taktowanie, uzasadnieniem są tu kwestie technologiczne i ekonomiczne. Koncepcja obliczeń wielowątkowych została opisana np. w pracy GRAMA I IN. [2003]. W rozdziale 6 oraz podrozdziale 7.6 omówiono badania nad poprawą efektywności obliczeń w autorskich programach komputerowych, z wykorzystaniem techniki obliczeń równoległych.

Centralnym punktem algorytmu MES jest rozwiązanie układu równań liniowych. Typowe układy równań MES charakteryzują się tzw. rzadką macierzą współczynników (nieliczne współczynniki są niezerowe). Zastosowanie tradycyjnych algorytmów rozwiązywania (zob. przegląd metod w KINCAID, CHENEY [2006]) jest czasochłonne i wymaga dużych zasobów pamięci operacyjnej komputera. Znacząco lepszą wydajność osiągają specjalne algorytmy przeznaczone do bardzo dużych układów równań. Są one stosowane w obliczeniach naukowych i oprogramowaniu komercyjnym. W autorskim programie komputerowym zastosowano procedury z bibliotek HSL i PARDISO (zob. rozdział 6).

² Prof. M. Bieniek, absolwent (1948) i pracownik naukowy (1948–1952) Politechniki Gdańskiej.

1.2. Założenia

U podstaw realizowanych w pracy badań leżą następujące założenia:

1. formalizm nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok;
2. teoria ścinania pierwszego rzędu do wyznaczenia rozkładu odkształceń na grubości powłoki, wprowadzona tylko na poziomie formułowania równań konstytutywnych;
3. sprężysto-plastyczny płaski stan naprężenia (PSN) uogólniony na kontinuum Cosseratów w warstwie powłoki. Przyjęcie PSN w warstwie płyty lub powłoki wynika z praktyczności takiego podejścia do celów inżynierskich (zob. np. HUGHES [2000]).

Zwieńczenie badań stanowi realizacja przykładów numerycznych. Pozwalają one na weryfikację poczynionych założeń teoretycznych i odniesienie do dotychczas przedstawionych w literaturze wyników. W badaniach numerycznych autor posłużył się autorskim programem komputerowym (CiMplast), bazującym na programie do analizy powłok w zakresie sprężystym (CAM). W programie zaimplementowane są następujące narzędzia badawcze:

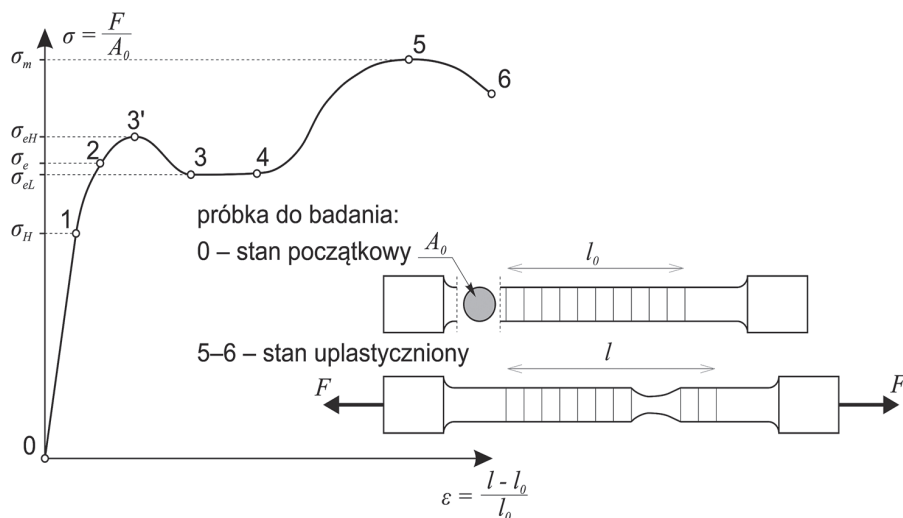
1. wykorzystanie metody elementów skończonych, w szczególności rodziny lagranżowskich elementów skończonych CAM;
2. rozwiązywanie równań plastyczności iteracyjnymi algorytmami *closest point projection method* (CPPM) oraz *cutting plane algorithm* (CPA);
3. wykorzystanie nowoczesnych algorytmów numerycznych – zrównoleglenie obliczeń oraz rozwiązywanie rzadkiego układu równań w algorytmie MES.

1.3. Próba jednoosiowego rozciągania – rola w opisie teorii plastyczności

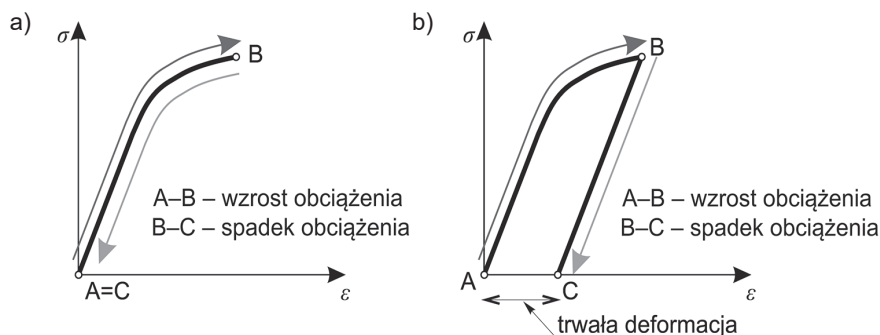
Ze względu na tematykę pracy zasadne jest streszczenie pewnych faktów dotyczących plastyczności jednowymiarowej (1D). Zaawansowanie i wielość zastosowań teorii plastyczności nie zmieniają faktu, że przy pozyskiwaniu parametrów materiałowych podstawowa i powszechnie wykorzystywana (m.in. ze względu na łatwość realizacji) jest próba jednoosiowego rozciągania (np. próbki metalowe) lub ściskania (np. próbki betonowe) materiału.

W celu zobrazowania podstawowych charakterystyk materiału sprężysto-plastycznego poniżej zebrano informacje na temat jednoosiowej próby rozciągania próbki metalowej. Jej wynikiem jest wykres zależności naprężenia nominalnego od odkształcenia próbki ($\sigma - \varepsilon$). Typowy wykres $\sigma - \varepsilon$ uzyskany z badań stali miękkiej (rys. 1.1) zawiera określenie wartości pewnych granic (SKRZYPEK [1986]): granica proporcjonalności σ_H , wyraźna granica plastyczności σ_e , granica plastyczności górna σ_{eH} i dolna σ_{eL} , wytrzymałość na rozciąganie σ_m . Wyróżnia się też następujące odcinki na wykresach: platforma idealnej plastyczności (3–4), wzmocnienie plastyczne (4–5), odcinek niestatecznej deformacji (5–6).

Deformację sprężystą i plastyczną odróżnia zachowanie materiału po ustąpieniu obciążenia. Materiał sprężysty wraca do swojego pierwotnego kształtu, natomiast w materiale plastycznym (o ile jest przekroczona granica plastyczności) pewna część deformacji zostaje utrwalona. Wykresy $\sigma - \varepsilon$ dla opisanych sytuacji zestawiono na rys. 1.2.



Rys. 1.1. Próba jednoosiowego rozciągania. Wykres ($\sigma - \epsilon$) dla stali miękkiej, geometria i zachowanie rozciąganej próbki

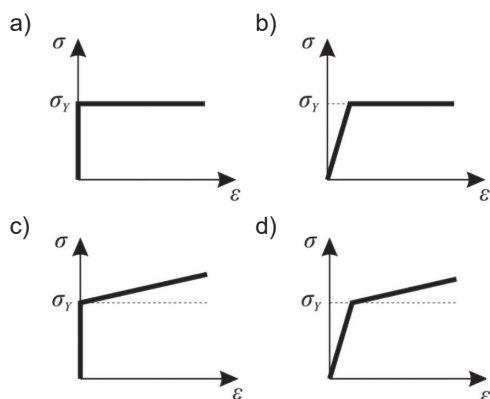


Rys. 1.2. Próba jednoosiowego rozciągania. Wykres ($\sigma - \epsilon$):
a) materiał sprężysty; b) materiał plastyczny

Opis teoretyczny oraz implementacja numeryczna krzywej $\sigma - \epsilon$ z uwzględnieniem wszystkich jej szczegółów byłyby kłopotliwe. Dlatego uzasadnione, również praktyką inżynierską, jest przyjęcie pewnych uproszczonych zależności $\sigma - \epsilon$ (rys. 1.3), zob. np. SKRZYPEK [1986]. Deformacja plastyczna rozpoczyna się wraz z osiągnięciem granicy plastyczności σ_y (oznaczonej inaczej niż wcześniej w celu odróżnienia danych z eksperymentu od wartości założonej przy wybranej aproksymacji krzywej $\sigma - \epsilon$).

Nie tylko metale wykazują zachowanie sprężysto-plastyczne. Dotyczy to również innych materiałów, takich jak beton, drewno, ośrodek gruntowy czy tworzywa sztuczne. Ich różnorodność powoduje, że procesy uplastycznienia mogą w nich przebiegać w różny sposób, a także wymaga doboru odpowiednich metod badawczych do oceny właściwych zjawia-

sku parametrów materiałowych. Uproszczone modele (rys. 1.3) mogą się okazać niewystarczające do poprawnego opisu zachowania się konstrukcji wykonanych z tych materiałów.



Rys. 1.3. Aproksymacja krzywej $\sigma - \varepsilon$. Materiał: a) sztywno-plastyczny; b) idealnie sprężysto-plastyczny; c) sztywno-plastyczny ze wzmocnieniem; d) sprężysto-plastyczny ze wzmocnieniem

Zadaniem teorii plastyczności jest opisanie zjawisk zachodzących w wyidealizowanym kontinuum w możliwie prosty sposób, a jednocześnie wystarczająco dokładnie w stosunku do rzeczywistych procesów.

W opracowaniach dotyczących plastyczności wiele miejsca poświęcono na przedstawienie rysu historycznego rozwoju opisującej ją teorii. Przełomowym okresem w jej tworeniu był początek XX wieku, kiedy to trzech uczonych, niezależnie od siebie, sformułowało hipotezę wyężenia materiału, znaną dziś jako kryterium Hubera–Misesa–Hencky’ego, w literaturze angielskojęzycznej zaś częściej jako kryterium von Misesa. O ile początkowo praca prof. Hubera [1904] była nieznaną na Zachodzie (została wydana w języku polskim we Lwowie), to już w 1950 roku Hill przywołuje ją w swoim wielokrotnie cytowanym dziele dotyczącym matematycznych podstaw plastyczności (HILL [1950]). Niezrozumiały jest zatem fakt, że współcześni autorzy prac przeglądowych (zob. np. BRUHNS [2014]) przemilczają jej istnienie. Zasadne wydaje się więc wskazanie wpływu polskich uczonych na rozwój teorii plastyczności.

1.4. Znaczenie polskich uczonych w rozwoju teorii plastyczności

Pierwszeństwo w zasługach dla rozwoju teorii plastyczności należy przypisać dwóm wielkim uczonym pracującym w I połowie XX wieku – prof. Maksymilianowi Tytusowi Huberowi i prof. Włodzimierzowi Trzywdarowi Burzyńskiemu.

1.4.1. Maksymilian Tytus Huber

Hipoteza Hubera–Misesa–Hencky’ego jest kryterium uplastycznienia powszechnie stosowanym w obliczeniach inżynierskich. Najistotniejsze prace mówiące o jej historii przywołano między innymi w książkach HILL [1950] oraz JONES [2009]. Największe zasługi w powiązaniu energii odkształcenia postaciowego z uplastycznieniem materiału (obserwacja ta leży u podstaw hipotezy) położył wielki uczyony James Clerk Maxwell³. W liście do Williama Thomsona z 1856 roku proponuje on dekompozycję energii odkształcenia na część postaciową i objętościową. Formułuje przy tym hipotezę, zgodnie z którą materiał pozostaje w zakresie sprężystym, jeśli wartość energii postaciowej nie przekroczy pewnego parametru (*resilience of rigidity*). Ma on wartość pracy włożonej w materiał w procesie czystego ścinania, która powoduje trwałe odkształcenie. Maxwell wspomina, że nie spotkał się z badaniami dotyczącymi próby wielokierunkowego odkształcenia i uzyskania uplastycznienia. Uczyony planował zrealizowanie opisu matematycznego i przeprowadzenie eksperymentów, ale żadne dalsze prace (według najlepszej wiedzy autora) nie wskazują na spełnienie tych zamiarów.

Koncepcję odkształcenia postaciowego jako miary uplastycznienia powtórnie zaproponował wielki polski uczyony Maksymilian Tytus Huber (HUBER [1904]). Reprinty jego oryginalnych prac oraz ocenę ich znaczenia dla nauki polskiej i światowej można znaleźć w pracy OLESIAK, ENGEL [2010].

Oryginalne dzieło Hubera nie zdobyło szerokiego rozgłosu na świecie, przeszkodą w tym był głównie polski język opracowania. Sam Huber po publikacji pracy wycofał się na jakiś czas z wygłaszania na wykładach zawartych w niej tez, twierdząc, że inne kryteria lepiej opisują przeprowadzone eksperymenty. Dopiero na nowo zrealizowane próby potwierdziły słuszność jego założeń.

Po Huberze dwóch innych uczonych realizowało niezależne badania, z których wynika identyczne kryterium – Richard von Mises (1913) oraz Heinrich Hencky (1924). Mises w swojej pracy proponuje kryterium uplastycznienia zależne tylko od drugiego niezmiennika stanu naprężenia. Dopiero Hencky wskazuje na interpretację tego niezmiennika jako właściwej energii odkształcenia postaciowego. W 1924 roku trzech uczonych spotkało się na Kongresie Mechaniki Technicznej w holenderskim mieście Delft. Wzajemna wymiana doświadczeń zaowocowała pracami kolejnego znakomitego polskiego uczonego, ucznia Hubera, Włodzimierza Burzyńskiego (BURZYŃSKI [1928], BURZYŃSKI [1929]).

HILL [1950] i JONES [2009] podkreślają, że w swojej pracy Huber nie precyzuje, czy jego kryterium dotyczy uplastycznienia, czy też kruchego pęknięcia. Istotnie, w pierwszym akapicie Huber pisze (pisownia oryginalna): „Najogólniej cel nauki o wytrzymałości streszcza się w odpowiedzi na pytanie: Jakie siły zewnętrzne wywołują w danym ciele stałym (względnie układzie ciał stałych) niebezpieczeństwo pęknięcia w oznaczonym stopniu?”.

Dalej w wielu miejscach opracowania pojawia się termin *pęknięcie*. Na podstawie przeglądu literatury i własnych obserwacji Huber formułuje stwierdzenie: „Odkształcenie elementu ciała określa jego wyężenie. [...] Wyężenie materiału mierzy się właściwą pracą odkształcenia”.

³ Osiągnięcia J.C. Maxwella wskazuje w swym monumentalnym dziele BADUR [2009].

Niemniej jednak potwierdzenie faktu, że Huber traktuje swoje kryterium jako kryterium uplastycznienia (tak jak jest ono rozumiane współcześnie – jako wskazanie granicy między stanem sprężystym a plastycznym), stanowi fragment: „[...] w praktyce technicznej nie dopuszczamy z reguły odkształceń poza granicą sprężystości, chodzi nam przeto nie tyle o niebezpieczeństwo pęknięcia, ile o niebezpieczeństwo przekroczenia granicy sprężystości, które według wszelkiego prawdopodobieństwa mierzy również właściwa praca odkształcenia [...]”.

1.4.2. Włodzimierz Trzywdar Burzyński

Warto w tym miejscu omówić wkład prof. Włodzimierza Trzywdara Burzyńskiego na rozwój teorii plastyczności w okresie międzywojennym. W swojej pracy (BURZYŃSKI [1928]), będącej równocześnie dysertacją doktorską, Burzyński klasyfikuje dotychczas ogłoszone hipotezy wyężenia materiału oraz formuluje własną hipotezę, znaną jako hipoteza Burzyńskiego lub hipoteza niezmienników.

Praca Burzyńskiego została opublikowana w czasie, gdy środowisko badaczy teorii plastyczności było wyraźnie podzielone między zwolenników hipotez naprężeniowych oraz przychylających się do hipotez energetycznych (do tej grupy zaliczali się Huber i Burzyński). Uzasadnia to ostrą krytykę hipotez naprężeniowych zawartą w pracach Burzyńskiego, a także w jego wystąpieniach na konferencjach międzynarodowych.

Hipoteza Burzyńskiego rozszerza hipotezę Hubera o dodatkowy człon, związany z energią odkształcenia objętościowego. Formułując swoją hipotezę, Burzyński pragnął nadać jej cechy ogólne, dzięki czemu miała znajdować zastosowanie w szerokiej klasie materiałów. Takie też było dążenie części ówczesnych badaczy – powiązanie w jedność hipotez wyężenia dla materiałów sprężysto-plastycznych i sprężysto-kruchych.

Burzyński konsekwentnie krytykował hipotezy wytrzymałościowe pomijające wpływ pośredniego naprężenia głównego σ_2 (np. hipotezy Treski i Mohra). Za wartościowe uważał tylko te hipotezy, które przy odpowiednim doborze współczynników przechodzą w hipotezę Hubera. Takiemu podejściu przeczy wiele danych eksperymentalnych (częściowo dostępnych, gdy Burzyński tworzył swoje dzieła), potwierdzających stosowność hipotez Treski i Mohra w odniesieniu do pewnych grup materiałów.

1.4.3. Polska szkoła plastyczności

Wpływ polskich uczonych na rozwój teorii plastyczności nie kończy się na dokonaniach profesorów Hubera i Burzyńskiego. Znaczące zasługi w tej dziedzinie mieli m.in. badacze Instytutu Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk (IPPT PAN). Należy tu wymienić prof. Waława Olszaka, prof. Zenona Mroza, prof. Piotra Perzynę. Na Politechnice Krakowskiej swoje badania prowadził prof. Michał Życzkowski. Wspólnym mianownikiem aktywności wymienionych uczonych, oprócz tematyki badań, była długoletnia praca w ośrodkach zagranicznych.

Prof. Olszak (1902–1980) był wybitnym organizatorem nauki, uznawanym za twórcę polskiej szkoły teorii plastyczności, ale także znakomitym inżynierem praktykiem (stworzył

projekty wielu obiektów mostowych, m.in. na Wiśle). Jego wpływ na polską szkołę mechaniki stawia się na równi z wpływem prof. Hubera i prof. Nowackiego. Pracę doktorską, poświęconą teorii sprężystości, wykonał pod kierunkiem prof. Hubera w 1933 roku.

Pod kierunkiem prof. Olszaka pracę w IPPT PAN w 1955 roku rozpoczął prof. Mróz (ur. 1930). W 1959 roku obronił pracę doktorską *Nośność graniczna i optymalne projektowanie płyt i powłok*. W 1964 roku uzyskał habilitację, realizując pracę na temat *Związki fizyczne w teorii plastyczności*. Zaproponowany przez niego wielopowierzchniowy model materiału sprężysto-plastycznego powszechnie nazywany jest *modelem Mroza* (zob. np. KHAN, HUANG [1995]).

Z IPPT PAN związana jest również działalność prof. Perzyny (1932–2013), uznawanego za twórcę teorii lepkoplastyczności. Jego imieniem nazwano model opisujący to zjawisko (zob. np. DE BORST I IN. [2012]). Istotną część jego badań stanowiło modelowanie konstytutywne materiałów niesprężystych z uwzględnieniem opisu lokalizacji i zniszczenia. Oryginalną koncepcją prof. Perzyny jest opis tego problemu w ramach struktury termodynamicznej z parametrami wewnętrznymi wybieranymi z uwzględnieniem podstaw fizykalnych, jak również obserwacji doświadczalnych. Koncepcja ta znalazła zastosowanie w badaniu metodami analitycznymi zjawisk lokalizacji i zniszczenia w monokryształach oraz w materiałach polikrystalicznych.

Praca naukowa prof. M. Życzkowskiego była związana z Politechniką Krakowską, tam też obronił swój doktorat (1955) i habilitację (1961). W obu przypadkach były to pierwsze takie osiągnięcia na tamtejszej uczelni. Główne obszary jego badań to nieliniowe problemy w teorii plastyczności, stateczność układów mechanicznych oraz teoria i zastosowania optymalizacji.

1.5. Struktura pracy

Rozdział 2 zawiera podstawowe wiadomości z zakresu nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok, wystarczające do wprowadzenia sprężysto-plastycznej relacji konstytutywnej w dalszej części pracy. W rozdziale 3 zebrano wiadomości dotyczące równań sprężysto-plastycznych w ośrodku Cosseratów. Przestrzenny stan naprężenia zredukowano do stanu płaskiego. Przedstawiono założenia klasycznej teorii plastyczności i jej aplikację do ośrodka Cosseratów. Rozdział 4 prezentuje algorytmy rozwiązywania równań plastyczności i podaje formuły dla algorytmu autorskiego. Omówiono umiejscowienie algorytmów w ogólnym schemacie MES. Rozdział 5 zawiera informacje na temat użytego sformułowania MES oraz podaje przepis na całkowanie stanu naprężenia po grubości powłoki w celu uzyskania relacji konstytutywnej dla sił i momentów przekrojowych. W rozdziale 6 zebrano rozważania dotyczące efektywności obliczeń numerycznych – możliwości wprowadzenia obliczeń wielowątkowych oraz wydajności solverów dla rzadkich układów równań. W rozdziale 7 zestawiono przykłady numeryczne stanowiące weryfikację wcześniejszych wyprowadzeń. W rozdziale 8 dokonano podsumowania i przedstawiono możliwe kierunki dalszych prac. Treść pracy uzupełniają dodatki, w których zestawiono dodatkowe informacje dotyczące obrotów, geometrii powierzchni, całkowania numerycznego oraz wizualizacji wyników.

Monografia w dużej części opiera się na rozprawie doktorskiej autora pt. *Plastyczność w 6-parametrowej nieliniowej teorii powłok, efektywność obliczeń MES* (BURZYŃSKI [2015]). Obrona pracy odbyła się w dniu 4.03.2015 roku przed Radą Wydziału Inżynierii Lądowej i Środowiska Politechniki Gdańskiej, a stopień doktora nauk technicznych został autorowi nadany z wyróżnieniem.